

新竹市立建功高中 115 年第一次正式教師甄選

【高中數學】試題卷

- 試場規則說明 -

- 一、 在開始考試前，未經監試人員指示，請勿翻閱桌上的題目卷與答案卷。
- 二、 請確認桌上左上角座位標籤的姓名、准考證號碼是否正確，若有錯誤請舉手向監試人員反應。
- 三、 本次考試答案卷共計三張六面，請先確認張數無誤，並確認答案卷彌封處的准考證號碼是否正確，若有缺誤請舉手向監試人員反應，考試過程中不再另外提供空白答案卷。
- 四、 請將准考證、國民身分證或其他足以證明身分之證件放置於桌上左上角以便查驗。
- 五、 應考人憑准考證準時入場，遲到 15 分鐘以上者不准入場，考試開始後 45 分鐘內不得出場。
- 六、 所有應試相關文具請自備，考試期間不得在場內向他人借用，非考試必須之物品，不得攜入考場；題目卷與答案卷皆不得攜出考場。
- 七、 考試中嚴禁談話，左顧右盼及一切舞弊行為，違者取消應試資格。
- 八、 試卷上不得書寫姓名、准考證號碼及任何標誌，卷頭上之彌封應考人不得撕去或塗改，違者試卷作廢。
- 九、 應考人限用藍色或黑色原子筆答題，違者試卷不予計分，如有電腦閱卷答案卡，限用 2B 鉛筆作答。
- 十、 應考人手機及其他通訊器材，包含智慧型穿戴式裝置如 Apple Watch 等用品，請關機收妥，並請勿隨身攜帶，違反者依情節輕重酌予處置。
- 十一、 違反試場規則者，立即停止其參加考試，不服制止者，該科以零分計算。
- 十二、 開始考試後，監試人員會開始進行身分驗證，確認身分時請短暫脫下口罩，確認身份無誤後請戴上口罩，並將答案卷左上角的彌封處以釘書機彌封，彌封後若考生自行拆開，該試卷即作廢不計分。
- 十三、 開始考試之手搖鈴一響起即可直接翻閱試題作答，結束考試之手搖鈴響畢後請停止作答，並將雙手離開桌面。

新竹市立建功高中 115 年第一次正式教師甄選【高中數學】試題卷

一、填充題：(每題 5 分，共 75 分)

1. 建功高中全體教師中，有 10% 具博士學位，40% 具碩士學位，其餘為學士學位。已知學士學位教師中有 30% 通過英文檢定，碩士學位教師中有 60% 通過英文檢定，博士學位全數通過英文檢定。今隨機抽選一位已通過英文檢定的教師，則該教師具碩士學位的條件機率為 _____。(化為最簡分數)
2. 建功高中辦理科展，由 7 位數學老師、6 位自然老師與 2 位資訊老師共 15 人中，選出 8 人分成兩組擔任指導老師，每組各 4 人。若規定每組都恰有 1 位數學老師，且都至少有 1 位自然老師，則共有 _____ 種分組方式。
3. 設正四面體 ABCD 中，頂點 $A(3,2,0)$ ，且底面 $\triangle BCD$ 所在平面為 $2x + 3y + 6z + 2 = 0$ ，求此正四面體的體積 = _____。
4. 坐標平面上，已知二次函數圖形 $\Gamma: y = f(x)$ 的頂點 P 在直線 $2x + y + 2 = 0$ 上，且交 x 軸於點 $A(-1,0)$ ， $B(1,0)$ 。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $2x + y + 2 = 0$ 上，且亦通過點 $B(1,0)$ ，此時 P、Q 為兩相異點，則 $\overline{PQ} =$ _____。
5. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(1-i) = 3$ ， $f(0) = -3$ ， $f(2) = 3$ 。若方程式 $x^2 f(x) + 12 = 3x^2 + f(x)$ 的五個根分別為 a, b, c, d, e ，試求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 =$ _____。
6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ，則 $\triangle ABC$ 最大角的正弦值為 _____。
7. 已知 $a > b > 1$ ，若 $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$ ，則 $\frac{b}{a+4}$ 的最大值為 _____。
8. 已知 z_1, z_2 是互為共軛的複數，若 $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{3}$ ， $\frac{z_1}{z_2} \in R$ ，則 $|z_1| =$ _____。
9. 已知函數 $f(x) = \sqrt{2((x^2 - 5)^2 + (x + 3)^2)} + (x^2 - x + 1)$ ，則 $f(x)$ 的最小值為 _____。
10. 設 $f(x) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，其中 $a_i \in \{-1, 1\}, i = 0, 1, \dots, 6$ ，若 $f(2) = -53$ ，則 $f(1) =$ _____。
11. 若 a, b, c 為多項式方程式 $x^3 + 2025x + 1 = 0$ 的根，試求 $a^3 b^2 + a^2 b^3 + b^3 c^2 + b^2 c^3 + c^3 a^2 + c^2 a^3$ 的值為 _____。
12. 設 a, k, m 非負整數，且滿足 $\frac{4^a + 4^{a+k} + 4^{a+2k} + \dots + 4^{a+mk}}{2^a + 2^{a+k} + 2^{a+2k} + \dots + 2^{a+mk}} = 1928$ ，且方程式僅有一組解，試求 $(a, k, m) =$ _____。
13. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{6}{n}\right)^3 + \left(\frac{11}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5k-4}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5n-4}{n}\right)^3 \right] =$ _____。
14. 設有兩個不全等三角形，其面積相同。若每個三角形均有兩邊長為 7 與 9，且其第三邊長為整數，則此兩三角形第三邊長度之和為 _____。
15. 設 $a_1 = 2$ ，且數列 $\langle a_n \rangle$ 對於所有 $n \geq 2$ 滿足 $\frac{a_n - 1}{n-1} = \frac{a_{n-1} + 1}{n}$ ，求 $\left[\sum_{n=1}^{50} a_n^2 \right] =$ _____。

二、計算題：(共 25 分)

1. 已知 $a > 0$ ，令矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ ，在座標平面上直線 L_1 的方程式為 $y = 1$ ，設 L_1 經矩陣 A 變換後成另一條直線 L_2 ， L_1

經矩陣 A 的反矩陣 A^{-1} 變換後成另一條直線 L_3 ，令 L_1 與 L_2 的交點為 P ， L_1 與 L_3 的交點為 Q ， L_2 與 L_3 的交點為 R ，

$\triangle PQR$ 的面積為 $S(a)$

(1) 求 L_1 與 L_2 的方程式 (2 分)

(2) 求 P ， Q ， R 的座標 (3 分)

(3) 求 $S(a) = ?$ (3 分)

(4) 求 $\frac{S(a)}{a}$ 的最小值。 (2 分)

2. 設三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ，其圖形記為 C 。對任意實數 k (其中 $0 < k < \frac{1}{2}$)，設 $P(k, f(k))$ 為曲線 C 上一點，並設 L_k 為曲線 C 在點 P 的切線，試回答下列問題：

(1) 求切線 L_k 的方程式。 (4 分)

(2) 切線 L_k 除了與曲線 C 於點 P 相切外，尚與曲線 C 交於另一點 Q ，求點 Q 的 x 座標。 (5 分)

(3) 曲線 C 與切線 L_k 所圍的有界區域為 $A(k)$ ，求 $A(k)$ 的最小值。 (6 分)